**Лекция № 1. Минимизация функций**

Методы решения экстремальных задач естественно начать с описания классических методов минимизации функций. Рассматривается условие экстремума Ферма. Приводятся конкретные примеры его практического применения и анализируется комплекс проблем, связанных с этими вопросами. Разбор примеров проводится в форме семинарских занятий.

**1.1. Условие экстремума Ферма**

Ставится **следующая** экстремальная задача:

**Задача** **1.1**. *Найти точку минимума функции f на множестве действительных чисел*.

Мы ограничимся анализом классической *теоремы Ферма* о необходимом условии минимума дифференцируемой функции.

**Теорема 1.1***. Для того чтобы дифференцируемая функция  достигала в точке τ своего минимума, необходимо, чтобы она удовлетворяла равенству*

 (1.1)

**Доказательство**. Если *x* есть точка минимума функции *f*, то справедливо неравенство

*f*(*σ*) ≥ *f*(*τ* ) ∀*σ*,

откуда следует соотношение

*f*(*τ* +*h*) ≥ *f*(*τ*) ∀*h*.

Пользуясь разложением в ряд Тейлора с учетом дифференцируемости рассматриваемой функции, установим равенство

**

где *η*(*h*)/*h*→0 при *h*→0. В результате последнее неравенство принимает вид

*f* '(*τ*)*h* + *η*(*h*) ≥ 0 ∀*h*. (1.2)

Отсюда при *h*>0 следует соотношение

*f* '(*τ*) + *η*(*h*)/*h* ≥ 0.

После перехода к пределу при *h*→0 будем иметь

*f* '(*τ*) ≥ 0. (1.3)

Аналогично, из условия (1.2) при *h*<0 следует неравенство

*f* '(*τ*) + *η*(*h*)/*h* ≤ 0,

откуда после перехода к пределу при *h*→0 будем иметь

*f* '(*τ*) ≤ 0. (1.4)

Из соотношений (1.3), (1.4) следует условие (1.2).

Итак, решение задачи 1.1, т.е. поиск минимума функции на множестве действительных чисел сводится к анализу соотношения (1.1), представляющего собой алгебраическое уравнение (вообще говоря, нелинейное) относительно искомого значения *τ*.

**Замечание 1.1**. Обращаем внимание на существование глубокой связи между двумя, казалось бы, различными разделами математики – теорией экстремума и теорией уравнений. Эта связь будет неизменно присутствовать и при рассмотрении других, существенно более сложных задач.

**Определение 1.1**. *Уравнение* (1.1) *будем называть* ***условием******стационарности*** *или* ***условием******Ферма****, а его решение –* ***точкой стационарности*** *или* ***критической точкой*** *функции* *f*.

Рассмотрим некоторые характерные примеры.

**Пример 1.1**. Дана функция  Условие (1.1) для этой нее принимает вид  Единственное решение  полученного уравнения и является точкой минимума функции  (см. рис. 1.1).



Рис. 1.1. Единственная точка стационарности   
является абсолютным минимумом функции.

**Замечание 1.2.** В данном случае нахождение точки стационарности из соотношения (1.1) не вызвало особых затруднений. Однако в общем случае мы имеем дело с нелинейным алгебраическим уравнением, решение которого, как правило (для достаточно сложных функций *f*), далеко не тривиально и может быть найдено лишь приближенно на основе тех или иных вычислительных алгоритмов.

Рассмотренный пример соответствует простейшему случаю. Однако возможны и другие ситуации.

**Пример 1.2.** Дана функция  Соотношение (1.1) приводит к кубическому уравнению  Оно имеет три решения:  Непосредственной подстановкой определяем соответствующие значения рассматриваемой функции  Очевидно, лишь первое из найденных величин может соответствовать минимуму функции  на множестве действительных чисел (см. рис. 1.2), т.е. ее абсолютному минимуму(минимуму на всей области определения функции). Третье решение уравнения (1.1) соответствует локальному минимуму данной функции, т.е. минимизирует рассматриваемую функцию не всюду, а лишь в окрестности точки  Наконец, точка  соответствует локальному максимуму исследуемой функции.

**Замечание 1.3**. Отбросить "лишние" точки стационарности функции  можно, например, проверяя знаки второй производной в этих точках. Однако мы не будем это делать, поскольку вычисление вторых производных для рассматриваемых в дальнейшем задач оптимального управления (особенно, не линейных) является чрезвычайно громоздкой процедурой, как правило, не приводящей к содержательным результатам.

Полученные результаты приводят к необходимости уточнения используемых понятий, в частности, точек экстремума.



Рис. 1.1. Точки стационарности функции 

**Определение 1.2** (см. рис. 1.3). *Функция f имеет в точке τ* ***локальный минимум***(*соответственно*,***локальный максимум***), *если существует такая окрестность О этой точки, что справедливо неравенство * (*соответственно*, **) *для всех  Если в указанных соотношениях знак равенства возможен исключительно при  то говорят о* ***строгом******локальном минимуме*** (*максимуме*). *Если же данные неравенства справедливы для всех значений σ*, *то* *τ является точкой* ***абсолютного минимума***(*максимума*) *функции f*.



Рис. 1.3. Типы экстремумов функции.

Пусть задана экстремальная задача *Р* и некоторое соотношение *Q*, которому могут удовлетворять или не удовлетворять какие-либо объекты из множества, на котором осуществляется нахождение экстремума.

**Определение 1.3**. *Соотношение Q называется* ***необходимым условием экстремума*** *для задачи Р*, *если любое решение Р удовлетворяет соотношению Q*. *Соотношение Q называют* ***достаточным условием экстремума*** *задачи Р*, *если любой, удовлетворяющий ему объект оказывается решением задачи Р*.

Объяснить, откуда берется недостаточность в теории

**Замечание 1.4**. Если *Р* есть задача оптимального управления, то используется термин *необходимое* (*достаточное*) *условие оптимальности*.

Если условия экстремума являются необходимыми и достаточными, то его решения и только они оказываются решениями исследуемой экстремальной задачи (см. рис. 1.4), т.е. экстремальная задача и условия экстремума эквивалентны.



Рис. 1.4. Соотношения между множествами *U*0 решений  
экстремальной задачи и *U*\* решений условия экстремума.

**Замечание 1.5**. В принципе, произвольные множества *U*0 и *U*\* могут быть и не вложены одно в другое. Однако в этом случае нет оснований называть *U*\* множеством решений условия экстремума.

Итак, соотношение (1.1) является необходимым условием локального минимума (и максимума тоже) для дифференцируемой функции.

**Замечание 1.6**. Обратимся к доказательству теоремы 1.1. Если бы рассматриваемая точка *τ* доставляла максимум, а не минимум функции *f*, то в выражение в левой части неравенства (1.2) имело бы противоположный знак. Вследствие этого вместо (1.3) мы бы получили соотношение (1.4). Однако мы и так получили неравенство (1.4) за счет выбора в условии (1.2) отрицательного значения параметра *h*. Точно так же неравенство (1.3) может быть выведено из условия максимума функции *f* в точке *τ*. Таким образом, оба неравенства (1.3) и (1.4), а значит, и условие стационарности (1.1) могут быть в равной степени получены в том случае, когда *τ* является точкой минимума и максимума функции *f*. Следовательно, на основе соотношения (1.1) нельзя отличить минимум от максимума функции. Если теперь *τ* оказывается лишь точкой локального минимума функции, то соотношение (1.2) будет справедливо не для всех *h*, а лишь для достаточно малых значений этого параметра. В этом случае ничто не мешает нам вновь перейти к пределу при *h*→0 и получить неравенство (1.3), а значит, и условие стационарности. Это объясняет тот факт, что соотношению (1.1) может удовлетворять как точка абсолютного экстремума функции, так и точка ее локального экстремума.

Продолжаем исследование возможных свойств условия стационарности.

**Пример 1.3**. Дана функция  Пользуясь условием стационарности, находим три решения уравнения (1.1):   Из них второе соответствует локальному максимуму рассматриваемой функции, а остальные являются решениями задачи ее минимизации (см. рис. 1.5). В данном случае мы имеем дело с отсутствием единственности решения и достаточности условия стационарности.



Рис. 1.5. Функция имеет две точки минимума.

**Замечание 1.7**. Если *τ* является не единственной точкой минимума функции *f*, то всё равно будет выполнено соотношение  для всех значений *σ*. Тем самым вновь будет справедливо неравенство (1.2), а значит, и условие стационарности.

**Пример 1.4**. Дана функция  Условие стационарности в данном случае сводится к соотношению  не имеющему решения. Понятно, что сама задача минимизации рассматриваемой функции также не имеет решения (см. рис. 1.6). Тем не менее, поскольку множества решений данной задачи и соотношения (1.1) совпадают (оба пусты), есть основания считать, что используемое условие экстремума является необходимым и достаточным.



Рис. 1.6. Точки стационарности для неразрешимой экстремальной задачи отсутствуют.

**Замечание 1.8**. Доказательство теоремы 1.1 начинается с предположения о том, что *τ* есть точка минимума рассматриваемой функции. Если это предположение не реализуется, то и последующие рассуждения теряют смысл. В этой связи отсутствие решений условия стационарности в последнем примере вполне естественно.

**Замечание 1.9**. Отметим, что недостаточность условия экстремума и отсутствие минимума функции являются качественно разными свойствами. В частности, в примере 1.2 минимум существует, но нет достаточности, а в примере 1.4 есть достаточность, но нет минимума.

**Пример 1.5**. Рассматривается функция  Необходимое условие экстремума здесь имеет единственное решение  которое не минимизирует функцию  (см. рис. 1.7). Задача ее минимизации не имеет решения, вследствие чего соотношение (1.1) является необходимым, но не достаточным условием экстремума.



Рис. 1.7. Единственная точка стационарности не минимизирует функцию.

**Замечание 1.10**. Как и в предшествующем примере, предположение о том, что в некоторой точке *τ* достигается минимум рассматриваемой функции, оказалось не верным. Это обстоятельство не позволяет воспроизвести доказательство теоремы 1.1 для данной функции и установить соотношение (1.1) как следствие указанного предположения. Однако этот факт вовсе не означает, что условие стационарности не может выполняться само по себе.

**Замечание 1.11**. Характерно, что в последнем примере единственная точка стационарности не является даже точкой локального экстремума рассматриваемой функции. Это обстоятельство, конечно же, связано с отсутствием таковых у рассматриваемой функции. В данном случае мы имеем дело с *точкой перегиба* функции. Любопытно, что в данной точке обращается в нуль не только первая, но и вторая производная функции. Последний пример показывает, что точки стационарности могут существенно различаться по своим свойствам.

**Замечание 1.11.** Не надо, впрочем, думать, что обращение в нуль первых двух производных функции в некоторой точке является свидетельством того, что мы имеем дело именно с точкой перегиба. Подобная ситуация реализуется, к примеру, для функции  в нуле. Тем не менее, эта функция имеет там абсолютный минимум.

**Замечание 1.13**. Для функции одной переменной решение условия стационарности оказывается либо точкой экстремума (локального или абсолютного), либо точкой перегиба. Для функций многих переменных, а, тем более, для функционалов общего вида существует значительно более богатое многообразие форм критических точек.

Последние два примера свидетельствуют об актуальности проблемы существования решения рассматриваемой экстремальной задачи.

**Пример 1.6**. Дана функция  Вследствие ее недифференцируемости необходимое условие экстремума (1.1) здесь оказывается не применимым. Таким образом, поиск реально существующей точки минимума  (см. рис. 1.8) требует привлечения другого математического аппарата.



Рис. 1.8. Условие стационарности   
не позволяет определить минимум недифференцируемой функции.

**Замечание 1.14**. Естественно, в том случае, когда минимизируемая функция не является дифференцируемой, мы не сможем получить неравенство (1.2) и вытекающее из него условие стационарности. Тем не менее, задача минимизации этой функции вполне осмысленна, а следовательно, разработка эффективных методов решения подобных задач представляет несомненный интерес.

На основании рассмотренных примеров можно выделить следующие проблемы, связанные с применением условия стационарности для задачи 1.1 отыскания минимума данной функции:

* *существование решения экстремальной задачи* (для неразрешимых задач необходимое условие экстремума либо не имеет решения, либо дает заведомо не верные результаты);
* *единственность решения экстремальной задачи* (в отсутствии единственности необходимое условие экстремума наверняка имеет не единственное решение);
* *достаточность условия стационарности* (в отсутствии достаточности решение условия стационарности может не быть решением экстремальной задачи);
* *применимость условия стационарности* (в отсутствии дифференцируемости *минимизируемой функции* условие стационарности оказывается не применимым).
* *практическая реализация условия стационарности* (соотношение (1.1) представляет собой, вообще говоря, нелинейное алгебраическое уравнение, непосредственное решение которого далеко не очевидно);

Все выше указанные проблемы существенно усложняются при переходе к более сложным экстремальным задачам, которые, собственно, и являются непосредственным предметом данного курса.

### 2.3. Gradient method

Условие стационарности представляет собой алгебраическое уравнение. В общем случае такие задачи решаются итерационно.

Рассмотрим уравнение

 (2.5)

It can be solved by *simple iterative method*

. (2.6)

where *k­* is the number of the iteration,  is a numerical iterative parameter. We can calculate the sequence  with using of given initial approximation  and given iterative parameter  for each iteration. That is the basic idea of the simple iterative method? Let the sequence  be converged as  so we obtain  Let us have the convergence  (for the easiest cast we can suppose that the iterative parameter does not depend from the number of the iteration). Passing to the limit in (2.6), we get



if the function *F* is continuous. So the number *x* satisfies the equation (2.5). Thus the limit of our sequence is the solution of the given algebraic equation (2.5). Note that the result does not depend from the initial approximation and the choosing of the iterative parameter. However this result is true for the convergence of the sequence  only. Certainly the fact of the convergence and its velocity can be depending very much from the initial approximation and the iterative parameter.

The simple iterative methods (2.6) for the stationary condition (2.1) is the relation

.

This method does not depend of the sign of the iterative parameter in principle. However note that in really we have the problem of minimization of the function *f*. We know that if the function increase at the point , then the its derivative is positive at this point. So it will be natural to choose the next value  less than . Analogically if the function decrease at the point , then the its derivative is negative at this point. So it will be natural to choose the next value  greater than . Therefore we will be used following form of iterative method

 (2.7)

where the iterative parameter  is positive. The algorithm (2.7) is called the *gradient method*.



Figure 2.10. Relation between  and .

There exists a lot of form of the gradient method. It depends from choosing of the iterative parameter. For example, we can choose it from the equality

 (2.8)

### Задание 1. Минимизация функций

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| **вариант** | **вопрос 1** | **вопрос 2** |
|  | С помощью условия стационарности провести анализ экстремумов функции ***f****.*  Проверить свойства точек стационарности. | Подобрать функцию с указанными свойствами. При этом возможно такой набор свойств не реализуется. В этом случае следует объяснить, почему. |
| 1 |  | Условие стационарности имеет единственно решение, которое не оптимально |
| 2 |  | Условие стационарности не имеет решения, хотя минимум функции существует |
| 3 |  | Условие стационарности имеет ровно два решения, которые оба оптимальны |
| 4 |  | Условие стационарности не является необходимым условием минимума |
| 5 |  | Условие стационарности имеет бесконечное множество решений |
| 6 |  | Условие стационарности имеет два решение – минимум и максимум |
| 7 |  | Условие стационарности имеет три решения – два локальных и один абсолютный минимум |
| 8 |  | Условие стационарности имеет два решения, одно из которых оптимально |
| 9 |  | Условие стационарности имеет два решение – минимум и максимум |
| 10 |  | Условие стационарности имеет три решения – локальный минимум, локальный максимум и абсолютный максимум |
| 11 |  | Условие стационарности не является необходимым условием максимума |
| 12 |  | Условие стационарности не имеет решения, но абсолютный минимум существует |
| 13 |  | Условие стационарности имеет три решения – локальный максимум, локальный минимум и абсолютный минимум |
| 14 |  | Условие стационарности имеет два решения, одно из которых не оптимально |
| 15 |  | Условие стационарности имеет два решения и является достаточным условием минимума |

Рассматриваются примеры применения условия стационарности для задачи минимизации функции одной переменной. Требуется привести примеры функций с описанными ниже свойствами. Следует иметь в виду, что некоторые из описанных ситуаций невозможны. В этом случае необходимо дать соответствующие объяснения.

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| **вариант** | **пример 1** | **пример 2** | **пример 3** |
| 1 | Условие стационарности имеет единственно решение, которое не оптимально | Условие стационарности не имеет решения | Условие стационарности имеет три решения – локальные минимум и максимум и абсолютный минимум |
| 2 | Условие стационарности не имеет решения, хотя минимум функции  существует | Условие стационарности имеет единственно решение, которое оптимально | Условие стационарности не является необходимым условием минимума |
| 3 | Условие стационарности имеет три решения – локальные минимум и максимум и абсолютный максимум | Условие стационарности имеет два решения, которые обе оптимальны | Условие стационарности является достаточным условием минимума |
| 4 | Условие стационарности является достаточным условием минимума | Условие стационарности имеет единственно решение, которое не оптимально | Условие стационарности имеет три решения – два локальных и один абсолютный минимум |
| 5 | Условие стационарности является необходимым и достаточным условием минимума | Условие стационарности  не применимо | Условие стационарности имеет два решение – минимум и максимум |
| 6 | Условие стационарности не имеет решения, хотя минимум функции  существует | Условие стационарности для  функции с бесконечным множеством минимумов | Условие стационарности не является достаточным условием максимума |
| 7 | Условие стационарности имеет два решения, одно из которых оптимально | Условие стационарности не имеет решения | Условие стационарности является достаточным условием максимума |
| 8 | Условие стационарности имеет два решения и является достаточным условием минимума | Условие стационарности имеет решение, хотя функция не имеет минимума | Условие стационарности  не применимо |
| 9 | Условие стационарности имеет два решения, одно из которых не оптимально | Условие стационарности для  функции с двумя точками абсолютного минимума | Условие стационарности не является необходимым условием максимума |

1. Алексеев В.М., Тихомиров В.М., Фомин С.В. Оптимальное управление. – М., Наука, 1979. –   
   С. 44-47.